<u>Note su sistemi dinamici pilotati dal rumore</u>

Stefano Giordano

Luglio 1998

<u>Comportamento di particolari sistemi lineari con rumore moltiplicativo</u>

<u>Equazione di Fokker-Planck</u>

<u>Processo di Ornstein-Uhlenbeck</u>

<u>Generalizzazione del processo di Ornstein-Uhlenbeck con rumori moltiplicativi</u>

<u>Sistemi con rumore moltiplicativo colorato</u>

Comportamento di particolari sistemi lineari con rumore moltiplicativo

Al fine di studiare il più generico sistema dinamico sottoposto all'effetto del rumore è utile premettere il comportamento di alcuni sistemi dinamici lineari contenenti rumori moltiplicativi. In particolare sarà sufficiente lo studio dell'evoluzione del valore medio di tali sistemi.
Il primo teorema riportato è introduttivo e serve sostanzialmente per mostrare un metodo di analisi applicandolo ad un caso semplice.

<u>*Teorema:*</u> *consideriamo l' equazione differenziale:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = [a(t) + b(t)n(t)]x(t) \\ x(t_0) = x_o \end{cases}}$$

dove il rumore n(t) è Gaussiano con:

$$\begin{cases} E\{n(t)\} = 0 & \forall t \\ E\{n(t_1)\cdot n(t_2)\} = 2\delta(t_1 - t_2) & \forall t_1, t_2 \end{cases}$$

ed x_o *è una variabile aleatoria indipendente da n(t); il valore medio evolve allora con la dinamica seguente:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dE\{x(t)\}}{dt} = [a(t) + b^2(t)]E\{x(t)\} \\ E\{x(t_0)\} = E\{x_o\} \end{cases}}$$

<u>*dim:*</u> esprimiamo la soluzione formale generica:

$$x(t) = x_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} [a(\tau) + b(\tau)n(\tau)]d\tau\right\} = x_0\left\{\exp\int_{t_0}^{t}[a(\tau)]d\tau\right\}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[b(\tau)n(\tau)]d\tau\right\} =$$

$$= x_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\left[\int_{t_0}^{t}[b(\tau)n(\tau)]d\tau\right]^i =$$

$$= x_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\underbrace{\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t}[b(\tau_1)n(\tau_1)]\ldots[b(\tau_i)n(\tau_i)]d\tau_1\ldots d\tau_i}_{i-volte}$$

bisogna calcolare il valore medio:

$$E\{x(t)\} = E\{x_0\}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\underbrace{\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t}[b(\tau_1)\ldots b(\tau_i)]E\{n(\tau_1)\ldots n(\tau_i)\}d\tau_1\ldots d\tau_i}_{i-volte}$$

la gaussianità del rumore comporta:

$$E\{n(t_1)n(t_2)\ldots n(t_{2k-1})\} = 0$$
$$E\{n(t_1)n(t_2)\ldots n(t_{2k})\} = 2^k \sum_{P\subset S_{2k}}\delta(t_{i_1}-t_{i_2})\ldots\delta(t_{i_{2k-1}}-t_{i_{2k}})$$

dove la somma è estesa a tutte le permutazioni $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 2k \\ i_1 & \ldots & i_{2k}\end{pmatrix}$ del tipo P che generano tutti termini diversi all'interno del simbolo di sommatoria.
Si verifica che tali permutazioni sono in numero $\frac{(2k)!}{2^k k!}$.
Ad esempio si ha:

$$E\{n(t_1)n(t_2)n(t_3)n(t_4)\} = 2^2\left[\delta(t_1-t_2)\delta(t_3-t_4)+\delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4)+\delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3)\right]$$

Quindi si può procedere nel calcolo del valore medio:

$$E\{x(t)\} =$$

$$= E\{x_0\}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\underbrace{\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t}[b(\tau_1)\ldots b(\tau_{2k})]E\{n(\tau_1)\ldots n(\tau_{2k})\}d\tau_1\ldots d\tau_{2k}}_{2k-volte} =$$

$$= E\{x_0\}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a(\tau)]d\tau\right\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\underbrace{\int_{t_0}^{t}\dots\int_{t_0}^{t}\ [b(\tau_1)\dots b(\tau_{2k})]2^k\sum_{P\subset S_{2k}}\delta(\tau_{i_1}-\tau_{i_2})\dots\delta(\tau_{i_{2k-1}}-\tau_{i_{2k}})d\tau_1\dots d\tau_{2k}}_{2k-volte}$$

Si possono quindi eseguire k integrazioni :

$$E\{x(t)\} = E\{x_0\}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\underbrace{\int_{t_0}^{t}\dots\int_{t_0}^{t}\ [b^2(\tau_1)\dots b^2(\tau_k)]2^k\frac{(2k)!}{2^k k!}d\tau_1\dots d\tau_k}_{k-volte} =$$

$$= E\{x_0\}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{\int_{t_0}^{t}\dots\int_{t_0}^{t}\ [b^2(\tau_1)\dots b^2(\tau_k)]d\tau_1\dots d\tau_k}_{k-volte} =$$

$$= E\{x_0\}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left[\int_{t_0}^{t}[b^2(\tau)]d\tau\right]^k = E\{x_0\}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a(\tau)+b^2(\tau)]d\tau\right\}$$

Derivando si ottiene la tesi del teorema.

c.v.d.

Nel seguente teorema si riporta una generalizzazione al caso in cui lo stato del sistema dinamico abbia dimensione maggiore di uno.
Il risultato sarà utile per ricavare successivamente l'equazione di Fokker-Planck che descrive l'evoluzione della densità di probabilità per un sistema dinamico generico ma scalare.

Teorema: *consideriamo il sistema di equazioni differenziali:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}(t)}{dt} = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)n(t)]\underline{x}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_o \end{cases}}$$

dove il rumore n(t) è Gaussiano con:

$$\begin{cases} E\{n(t)\} = 0 & \forall t \\ E\{n(t_1) \cdot n(t_2)\} = 2\delta(t_1 - t_2) & \forall t_1, t_2 \end{cases}$$

ed $\underline{x}_o$ *è un vettore aleatorio indipendente da n(t); il valore medio evolve allora con la dinamica seguente:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dE\{\underline{x}(t)\}}{dt} = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}^2(t)]E\{\underline{x}(t)\} \\ E\{\underline{x}(t_0)\} = E\{\underline{x}_o\} \end{cases}}$$

dim: sia $\Phi(t)$ una matrice fondamentale per il sistema descritto dalla matrice di stato A(t) e quindi:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\Phi(t)$$

$\Phi(t)$ è sicuramente non singolare e quindi si può usare il seguente cambio di variabili:

$$\underline{y}(t) = \Phi^{-1}(t)\underline{x}(t)$$

da cui $\underline{x}(t) = \Phi(t)\underline{y}(t)$ e allora si trova la dinamica di evoluzione di y:

$$\frac{d\underline{y}(t)}{dt} = \frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}\underline{x}(t) + \Phi^{-1}(t)\frac{d\underline{x}(t)}{dt} =$$

$$= -\Phi^{-1}(t)\frac{d\Phi(t)}{dt}\Phi^{-1}(t)\Phi(t)\underline{y}(t) + \Phi^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\Phi(t)\underline{y}(t) + \Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)n(t)\Phi(t)\underline{y}(t)$$

e infine:

$$\frac{d\underline{y}(t)}{dt} = \Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)\Phi(t)n(t)\underline{y}(t) = \mathbf{M}(t)n(t)\underline{y}(t)$$

avendo posto $\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)\Phi(t) = \mathbf{M}(t)$. Inoltre fisso la condizione iniziale:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{y}(t)}{dt} = \mathbf{M}(t)n(t)\underline{y}(t) \\ \underline{y_o} = \underline{y}(t_o) = \Phi^{-1}(t_o)\underline{x_o} \end{cases}$$

Si può esprimere la soluzione formale per mezzo dell'operatore di ordinamento temporale di Dyson:

$$\underline{y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\int_{t_o}^{t} \dots \int_{t_o}^{t} \mathrm{T}\left[M(\tau_1)n(\tau_1)\dots.M(\tau_n)n(\tau_n)\right] d\tau_1 \dots d\tau_n}_{n-volte}\, \underline{y_o}$$

Adesso si può calcolare il valore medio:

$$E\{\underline{y}(t)\} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\int_{t_o}^{t}\dots\int_{t_o}^{t}\mathrm{T}\left[M(\tau_1)\dots.M(\tau_n)\right]E\{n(\tau_1)\dots.n(\tau_n)\}d\tau_1\dots d\tau_n}_{n-volte}E\{\underline{y}_o\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\underbrace{\int_{t_o}^{t}\dots\int_{t_o}^{t}\mathrm{T}\left[M(\tau_1)\dots.M(\tau_{2k})\right]2^k\sum_{P\subset S_{2k}}\delta(\tau_{i_1}-\tau_{i_2})\dots\delta(\tau_{i_{2k-1}}-\tau_{i_{2k}})d\tau_1\dots d\tau_{2k}}_{2k-volte}E\{\underline{y}_o\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\underbrace{\int_{t_o}^{t}\dots\int_{t_o}^{t}\mathrm{T}\left[M^2(\tau_1)\dots.M^2(\tau_k)\right]2^k\frac{(2k)!}{2^k k!}d\tau_1\dots d\tau_k}_{k-volte}E\{\underline{y}_o\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{\int_{t_o}^{t}\dots\int_{t_o}^{t}\mathrm{T}\left[M^2(\tau_1)\dots.M^2(\tau_k)\right]d\tau_1\dots d\tau_k}_{k-volte}E\{\underline{y}_o\}$$

Ma quest'ultimo è lo sviluppo formale della soluzione del seguente:

$$\begin{cases}\dfrac{dE\{\underline{y}(t)\}}{dt} = \mathbf{M}^2(t)E\{\underline{y}(t)\}\\ E\{\underline{y}_o\} = E\{\underline{y}(t_o)\} = \Phi^{-1}(t_o)E\{\underline{x}_o\}\end{cases}$$

Ricordando che $\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)\Phi(t) = \mathbf{M}(t)$ si può infine trovare la dinamica del valore medio di x , infatti:

$$\frac{dE\{\underline{y}(t)\}}{dt} = \left[\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)\Phi(t)\right]^2 E\{\underline{y}(t)\} = \Phi^{-1}(t)\mathbf{B}^2(t)\Phi(t)E\{\underline{y}(t)\}$$

$$\underbrace{\Phi(t)\frac{dE\{\underline{y}(t)\}}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt}E\{\underline{y}(t)\}}_{\frac{dE\{\underline{x}(t)\}}{dt}} - \underbrace{\frac{d\Phi(t)}{dt}E\{\underline{y}(t)\}}_{A(t)E\{\underline{x}(t)\}} = \mathbf{B}^2(t)\Phi(t)E\{\underline{y}(t)\} = \mathbf{B}^2(t)E\{\underline{x}(t)\}$$

da cui infine:

$$\frac{dE\{\underline{x}(t)\}}{dt}=\left[\mathbf{A}(t)+\mathbf{B}^2(t)\right]E\{\underline{x}(t)\}$$

c.v.d.

Si può dare infine il seguente che è una generalizzazione con più rumori agenti sul sistema.
Questo risultato sarà utile per costruire l'equazione di Fokker-Planck relativa ad un sistema multidimensionale sottoposto all'azione di più rumori gaussiani bianchi.

<u>Teorema:</u> consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}(t)}{dt}=\left[\mathbf{A}(t)+\sum\limits_{j=1}^{m}\mathbf{B}_j(t)n_j(t)\right]\underline{x}(t)\\ \underline{x}(t_0)=\underline{x}_o\end{cases}}$$

dove i rumori n(t) sono Gaussiani con:

$$\begin{cases}E\{n_j(t)\}=0 & \forall t\quad \forall j\\ E\{n_i(t_1)\cdot n_j(t_2)\}=2\delta_{ij}\delta(t_1-t_2) & \forall t_1,t_2\quad \forall i,j\end{cases}$$

ed $\underline{x}_o$ è un vettore aleatorio indipendente da n(t); il valore medio evolve allora con la dinamica seguente:

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{dE\{\underline{x}(t)\}}{dt}=\left[\mathbf{A}(t)+\sum\limits_{j=1}^{m}\mathbf{B}_j^{\,2}(t)\right]E\{\underline{x}(t)\}\\ E\{\underline{x}(t_0)\}=E\{\underline{x}_o\}\end{cases}}$$

<u>Equazione di Fokker-Planck</u>

Si possono usare i risultati ottenuti per costruire le equazioni di Fokker-Planck relative ad ogni sistema dinamico.
Si vuole trovare una equazione differenziale alle derivate parziali che descriva l'evoluzione temporale della densità di probabilità dello stato del sistema.
Iniziamo con un sistema monodimensionale sul quale agisca un solo termine di rumore.

<u>Teorema:</u> consideriamo l' equazione differenziale:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = h(x,t) + g(x,t)n(t) \\ x(t_0) = x_o \end{cases}}$$

dove il rumore n(t) è Gaussiano con:

$$\begin{cases} E\{n(t)\} = 0 & \forall t \\ E\{n(t_1)\cdot n(t_2)\} = 2\delta(t_1 - t_2) & \forall t_1, t_2 \end{cases}$$

ed x_o è una variabile aleatoria indipendente da n(t) e distribuita con la densità f_o ; la densita di probabilità W del processo x evolve con la seguente equazione di Fokker-Planck:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial W(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial x}\cdot g(x,t) + h(x,t)\right]\cdot W(x,t)\right\} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^2(x,t)\cdot W(x,t)\right] \\ W(x,t_o) = f_o(x) \end{cases}}$$

dim: supponiamo inizialmente che n(t) ed x_0 siano particolari istanze prefissarte e che la soluzione dell'equazione sia allora x(t) ; in tale caso la seguente funzione delle variabili x e t:

$$\rho(x,t) = \delta(x - x(t))$$

evolve secondo la nota relazione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left[h(x,t) + g(x,t)n(t)\right] \cdot \rho(x,t)\right\} \\ \rho(x,t_o) = \delta(x - x_o) \end{cases}$$

Consideriamo ora nello spazio delle funzioni di una variabile una base completa ortonormale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) f_m(x) dx = \delta_{n,m}$$

Una generica funzione f(x) viene sviluppata nel modo seguente:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f_k(x)$$

dove i coefficienti sono calcolabili così:

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) f(x) dx$$

Gli operatori lineari che agiscono nello spazio delle funzioni definite in $(-\infty,+\infty)$ sono rappresentabili mediante matrici utilizzando la base riportata. Essendo O un operatore si ha:

$$(O)_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) O\left[f_m(x)\right] dx$$

Imponendo lo sviluppo :

$$\rho(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}c_k(t)f_k(x)$$

si possono costruire le equazioni nei coefficienti $c_k(t)$:

$$\begin{cases}\dfrac{dc_j(t)}{dt}=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}A_{jk}(t)c_k(t)+\sum_{k=1}^{+\infty}B_{jk}(t)c_k(t)n(t)\\ c_k(t_o)=f_k(x_o)\end{cases}$$

dove le matrici A e B sono rispettivamente quelle associate agli operatori $-\frac{\partial}{\partial x}[h(x,t)\bullet]$ e $-\frac{\partial}{\partial x}[g(x,t)\bullet]$ e quindi:

$$\begin{cases}A_{jk}(t)=-\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_j(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[h(x,t)f_k(x)\right]dx\\ B_{jk}(t)=-\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_j(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)f_k(x)\right]dx\end{cases}$$

Per passare alla densità di probabilità W è necessario ricordare che:

$$W(x,t)=E\{\delta(x-x(t))\}=E\{\rho(x,t)\}=\sum_{k=1}^{+\infty}E\{c_k(t)\}f_k(x)$$

ma per le proprietà dei sistemi con rumore moltiplicativo otteniamo:

$$\begin{cases}\dfrac{dE\{\underline{c}(t)\}}{dt}=\left[\mathbf{A}(t)+\mathbf{B}^2(t)\right]E\{\underline{c}(t)\}\\ E\{c_k(t_o)\}=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_k(x)f_o(x)dx\end{cases}$$

passando alle funzioni di due variabili si ottiene subito:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W(x,t)}{\partial t}=-\dfrac{\partial}{\partial x}\{h(x,t)\cdot W(x,t)\}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{g(x,t)\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}[g(x,t)\cdot W(x,t)]\right\}\\ W(x,t_o)=f_o(x)\end{cases}$$

e usando la proprietà della derivata dei prodotti si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{g(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)W(x,t)\right]\right\}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^2(x,t)W(x,t)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{g(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)W(x,t)\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[g^2(x,t)W(x,t)\right]\right\}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}W(x,t)\right]$$

e questo conclude la dimostrazione dell'equazione di Fokker-Planck scalare.

<u>*Teorema:*</u> *consideriamo il sistema di equazioni differenziali:*

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x_i(t)=h_i(\underline{x},t)+\displaystyle\sum_{j=1}^{m}g_{ij}(\underline{x},t)\cdot n_j(t) \\ x_i(t_o)=x_{oi}\end{cases}\qquad\qquad \forall i=1..n$$

dove i rumori $n_i(t)$ sono Gaussiani con:

$$\begin{cases}E\left\{n_j(t)\right\}=0 & \forall t\quad \forall j \\ E\left\{n_i(t_1)\cdot n_j(t_2)\right\}=2\delta_{ij}\delta(t_1-t_2) & \forall t_1,t_2\quad \forall i,j\end{cases}$$

ed $\underline{x}_o$ è un vettore aleatorio indipendente da n(t) e distribuito con la densità f_o ; la densità di probabilità W del processo x evolve con la seguente equazione di Fokker-Planck:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial W(\underline{x},t)}{\partial t} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[h_i(\underline{x},t) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g_{kj}(\underline{x},t)\cdot \dfrac{\partial g_{ij}(\underline{x},t)}{\partial x_k}\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\} + \\
\qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\left[\sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\underline{x},t)\cdot g_{jk}(\underline{x},t)\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\} \\
W(\underline{x},t_o) = f_0(\underline{x})
\end{cases}
$$

dim: supponiamo inizialmente che n(t) ed x_0 siano particolari istanze prefissarte e che la soluzione dell'equazione sia allora x(t) ; in tale caso la seguente funzione delle variabili x e t:

$$
\rho(\underline{x},t) = \prod_{k=1}^{n} \delta\left(x_k - x_k(t)\right)
$$

evolve secondo la nota relazione:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho(\underline{x},t)}{\partial t} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left\{\left[h_k(\underline{x},t) + \sum_{j=1}^{m} g_{k,j}(\underline{x},t) n_j(t)\right]\cdot \rho(\underline{x},t)\right\} \\
\rho(\underline{x},t_o) = \delta(\underline{x} - \underline{x_o})
\end{cases}
$$

Consideriamo ora nello spazio delle funzioni di n variabili una base completa ortonormale:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\underline{x}) f_m(\underline{x}) d\underline{x} = \delta_{n,m}
$$

Una generica funzione f(x) viene sviluppata nel modo seguente:

$$
f(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f_k(\underline{x})
$$

dove i coefficienti sono calcolabili così:

$$
c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x}
$$

Gli operatori lineari che agiscono nello spazio delle funzioni definite in R^n sono rappresentabili mediante matrici utilizzando la base riportata. Essendo O un operatore si ha:

$$(O)_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\underline{x}) O\left[f_m(\underline{x}) \right] d\underline{x}$$

Imponendo lo sviluppo :

$$\rho(\underline{x}, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t) f_k(\underline{x})$$

si possono costruire le equazioni nei coefficienti $c_k(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dc_i(t)}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} A_{ik}(t) c_k(t) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{+\infty} B_{ik,j}(t) c_k(t) n_j(t) \\ c_k(t_o) = f_k(\underline{x_o}) \end{cases}$$

dove le matrici A e B_j sono rispettivamente quelle associate agli operatori
$-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left[h_l(\underline{x}, t) \bullet \right]$ e $-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left[g_{lj}(\underline{x}, t) \bullet \right]$ e quindi:

$$\begin{cases} A_{ik}(t) = -\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial x_l}\left[h_l(\underline{x}, t) f_k(\underline{x}) \right] d\underline{x} \\ B_{ik,j}(t) = -\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial x_l}\left[g_{lj}(\underline{x}, t) f_k(\underline{x}) \right] d\underline{x} \end{cases}$$

Per passare alla densità di probabilità W è necessario ricordare che:

$$W(\underline{x}, t) = E\left\{ \delta\left(\underline{x} - \underline{x}(t) \right) \right\} = E\left\{ \rho(\underline{x}, t) \right\} = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left\{ c_k(t) \right\} f_k(\underline{x})$$

ma per le proprietà dei sistemi con rumore moltiplicativo otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{dE\{\underline{c}(t)\}}{dt} = \left[\mathbf{A}(t) + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{B}_j^{\ 2}(t)\right] E\{\underline{c}(t)\} \\ E\{c_k(t_o)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(\underline{x}) f_o(\underline{x}) d\underline{x} \end{cases}$$

passando alle funzioni di due variabili si ottiene subito:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W(\underline{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\{h_i(\underline{x},t)\cdot W(\underline{x},t)\} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{g_{ij}(\underline{x},t)\cdot \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[g_{kj}(\underline{x},t)\cdot W(\underline{x},t)\right]\right\} \\ W(\underline{x},t_o) = f_o(\underline{x}) \end{cases}$$

ma usando la proprietà della derivata dei prodotti si ha:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{g_{ij}(\underline{x},t)\cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[g_{kj}(\underline{x},t)\cdot W(\underline{x},t)\right]\right\} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left\{\left[\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(\underline{x},t)\cdot g_{kj}(\underline{x},t)\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(\underline{x},t)\cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[g_{kj}(\underline{x},t)\cdot W(\underline{x},t)\right] - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(\underline{x},t)\cdot g_{kj}(\underline{x},t) W(\underline{x},t)\right]\right\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} g_{kj}(\underline{x},t) \frac{\partial g_{ij}(\underline{x},t)}{\partial x_k} W(\underline{x},t)\right]$$

e questo conclude la dimostrazione dell'equazione di Fokker-Planck vettoriale.

Processo di Ornstein-Uhlenbeck

Il più generale processo di Ornstein-Uhlenbeck è descritto da un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti non costanti non omogeneo con rumore additivo tipo quello descritto all'inizio.
Esplicitamente:

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(t) \cdot x_i(t) + b_j(t) + \sum_{i=1}^{n} g_{ji}(t) \cdot \Gamma_i(t)$$

oppure in forma matriciale:

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{b}(\mathbf{t}) + \mathbf{G}(\mathbf{t}) \cdot \Gamma(\mathbf{t})}$$

Alla precedente è possibile associare l'equazione di Fokker-Planck nel modo usuale (tenendo sempre conto delle ipotesi già citate sui rumori):

$$\frac{\partial W(\underline{x},t)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(t) \cdot x_i + b_j(t)\right) \cdot W(\underline{x},t)\right] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(t) \cdot g_{jk}(t)\right) \cdot \frac{\partial^2 W(\underline{x},t)}{\partial x_i \partial x_j}$$

oppure, in forma matriciale:

$$\boxed{\frac{\partial W(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\overline{\nabla} \cdot \left[\left(\mathbf{A}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{t})\right) \cdot W(\mathbf{x},t)\right] + \overline{\nabla} \cdot \left[\mathbf{G}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{G}^T(\mathbf{t}) \cdot \overline{\nabla} W(\mathbf{x},t)\right]}$$

dove i primi due operatori nabla indicano una divergenza n-dimensionale ed il terzo un gradiente sempre n-dimensionale.
Direttamente dall'equazione di Langevin che descrive il processo di Ornstein-Uhlenbeck è possibile determinare il valore medio e la matrice di covarianza.
Per calcolare il valore medio è sufficiente osservare che evolve con la seguente ottenibile subito ricordando che il valore medio del rumore è nullo:

$$\boxed{\frac{d}{dt} E\{\mathbf{x}(\mathbf{t})\} = \mathbf{A}(\mathbf{t}) \cdot E\{\mathbf{x}(\mathbf{t})\} + \mathbf{b}(\mathbf{t})}$$

La soluzione della precedente è esprimibile mediante la matrice di transizione Ψ:

$$\boxed{E\{\mathbf{x}(\mathbf{t})\} = \Psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_o) \cdot \mathbf{x_o} + \int_{t_o}^{t} \Psi(\mathbf{t}, \tau) \cdot \mathbf{b}(\tau)\, d\tau}$$

dove:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \Psi(\mathbf{t}, \mathbf{t_o}) = \mathbf{A}(\mathbf{t}) \cdot \Psi(\mathbf{t}, \mathbf{t_o}) \\ \Psi(\mathbf{t_o}, \mathbf{t_o}) = \mathbf{I} \end{cases}$$

Per il calcolo della matrice di covarianza è utile esprimere la soluzione formale completa:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \Psi(\mathbf{t}, \mathbf{t_o}) \cdot \mathbf{x_o} + \int_{t_o}^{t} \Psi(\mathbf{t}, \tau) \cdot \mathbf{b}(\tau)\, \mathbf{d}\tau + \int_{t_o}^{t} \Psi(\mathbf{t}, \tau) \cdot \mathbf{G}(\tau) \cdot \Gamma(\tau)\, \mathbf{d}\tau$$

Dalla definizione di covarianza Σ segue che:

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{t}) &= E\left\{[\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}] \cdot [\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}]^T\right\} = \\ &= E\left\{\int_{t_o}^{t} \Psi(\mathbf{t}, \tau) \cdot \mathbf{G}(\tau) \cdot \Gamma(\tau)\, d\tau \cdot \int_{t_o}^{t} \Gamma^T(\eta) \cdot \mathbf{G}^T(\eta) \cdot \Psi^T(\mathbf{t}, \eta)\, d\eta\right\} = \\ &= \int_{t_o}^{t}\int_{t_o}^{t} \Psi(\mathbf{t}, \tau) \cdot \mathbf{G}(\tau) \cdot E\left\{\Gamma(\tau) \cdot \Gamma^T(\eta)\right\} \cdot \mathbf{G}^T(\eta) \cdot \Psi^T(\mathbf{t}, \eta)\, d\eta\, d\tau \end{aligned}$$

e quindi :

$$\boxed{\Sigma(\mathbf{t}) = 2 \cdot \int_{t_o}^{t} \Psi(\mathbf{t}, \tau) \cdot \mathbf{G}(\tau) \cdot \mathbf{G}^T(\tau) \cdot \Psi^T(\mathbf{t}, \tau)\, d\tau}$$

Derivando la precedente rispetto al tempo è facile vedere che la matrice di covarianza deve essere soluzione della seguente equazione differenziale matriciale:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Sigma(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\cdot\Sigma(\mathbf{t}) + \Sigma(\mathbf{t})\cdot\mathbf{A}^T(\mathbf{t}) + \mathbf{2}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{t})\cdot\mathbf{G}^T(\mathbf{t}) \\ \Sigma(\mathbf{t_o}) = 0 \end{cases}}$$

La conoscenza del valore medio e della matrice di covarianza sono sufficienti a descrivere la soluzione completa dell'equazione di Fokker-Planck scritta per il caso particolare di processi di Ornstein-Uhlenbeck: infatti in tale caso la densità congiunta segue la legge gaussiana multidimensionale.
Precisamente la soluzione dell'eq. di Fokker-Planck suddetta con condizione iniziale

$$W(\mathbf{x},\mathbf{t_o}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x_o})$$

è questa:

$$\boxed{W(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\cdot\det\Sigma(\mathbf{t})}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\right]^T\cdot\Sigma^{-1}(\mathbf{t})\cdot\left[\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\right]\right\}}$$

dove $\Sigma(t)$ e $E\{\mathbf{x}(t)\}$ sono date dalle espressioni sopra riportate.
Verifico che questa soluzione soddisfa effettivamente sostituendola: a tal fine osserviamo che valgono le tre seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &div(\varphi\cdot\mathbf{v}) = \varphi\cdot div\,\mathbf{v} + grad\,\varphi\cdot\mathbf{v} \\ &div(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}) = tr(\mathbf{A}) \\ &grad\,W = \Sigma^{-1}\cdot\left(\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\right)\cdot W \end{aligned}$$

Usandole nel secondo membro dell'equazione di Fokker-Planck esso diviene:

$$\begin{aligned} &-tr(\mathbf{A})\cdot W + \mathbf{x}^T\cdot\mathbf{A}^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot\left(\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\right)\cdot W + \mathbf{b}^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot\left(\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\right)\cdot W + \\ &-tr(\mathbf{G}\cdot\mathbf{G}^T\cdot\Sigma^{-1})\cdot W + \left(\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\right)^T\cdot\Sigma^{-T}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{G}^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot(\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\})\cdot W \end{aligned}$$

Calcoliamo ora $\partial W/\partial t$ che corrisponde al primo membro:

per tale calcolo è utile la seguente proprietà sulla derivata di un determinante:

$$\frac{d}{dt}\det\Sigma(t) = \det\Sigma(t)\cdot tr(\Sigma^{-1}\cdot\frac{d\Sigma}{dt})$$

e questa sulla derivata dell'inversa di una matrice:

$$\frac{d}{dt}\left(\Sigma^{-1}\right) = -\Sigma^{-1}\cdot\frac{d\Sigma}{dt}\cdot\Sigma^{-1}$$

Applicandole si ottiene per il primo membro:

$$-\frac{1}{2}\cdot W\cdot tr(\Sigma^{-1}\cdot\dot{\Sigma}) + W\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{2}\cdot E\{\mathbf{x}\}^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot E\{\mathbf{x}\} - \frac{1}{2}\cdot\mathbf{x}^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot E\{\mathbf{x}\}\right] =$$
$$= -tr(\Sigma^{-1}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{G}^T + \mathbf{A})\cdot W + \left(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}\right)^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot\left(\mathbf{A}\cdot E\{\mathbf{x}\} + \mathbf{b}\right)\cdot W +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}\right)^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot\left(2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{G}^T + \mathbf{A}\cdot\Sigma + \Sigma^T\cdot\mathbf{A}^T\right)\cdot\Sigma^{-1}\left(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}\right)\cdot W$$

Sviluppando l'ultima espressione si vede che diventa identica al secondo membro quindi la verifica risulta terminata.
Spesso in numerose applicazioni pratiche la matrice A non dipende dal tempo quindi la matrice di transizione è esprimibile come segue:

$$\Psi(\mathbf{t},\mathbf{t_o}) = e^{\mathbf{A}\cdot(t-t_o)}$$

Valore medio e covarianza sono in questo caso:

$$\begin{cases} E\{\mathbf{x}\} = e^{\mathbf{A}\cdot(t-t_o)}\cdot\mathbf{x_o} + \int\limits_{t_o}^{t} e^{\mathbf{A}\cdot(t-\tau)}\cdot\mathbf{b}(\tau)\,d\tau \\ \Sigma(t) = 2\cdot\int\limits_{t_o}^{t} e^{\mathbf{A}\cdot(t-\eta)}\cdot\mathbf{G}(\eta)\cdot\mathbf{G}^T(\eta)\cdot e^{\mathbf{A}^T\cdot(t-\eta)}\,d\eta \end{cases}$$

Se anche la matrice G risulta costante allora la covarianza può essere ulteriormente semplificata:

$$\Sigma(t) = 2 \cdot \int_0^{t-t_o} e^{\mathbf{A}\cdot\xi} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^T \cdot e^{\mathbf{A}^T\cdot\xi}\, d\xi$$

Generalizzazione del processo di Ornstein-Uhlenbeck con rumori moltiplicativi

Consideriamo il seguente sistema di n equazioni differenziali stocastiche che può essere visto come una generalizzazione del processo di Ornstein-Uhlenbeck:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} x_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[a_{i,k}(t) + \sum_{j=1}^{p} b_{i,k,j}(t) n_j(t) \right] x_k(t) + \sum_{j=p+1}^{p+q} c_{i,j}(t) n_j(t) + v_i(t) \\ x_i(t_o) = x_{i,o} \end{cases}$$

Le prime p componenti del rumore vengono dette moltiplicative e le altre q vengono dette additive.
Usando le seguenti convenzioni $(\underline{x})_i = x_i$, $(\mathbf{A})_{i,j} = a_{i,j}$, $(\mathbf{B}_j)_{i,k} = b_{i,k,j}$ $(\mathbf{C})_{i,j} = c_{i,j}$, $(\underline{v})_i = v_i$ e $\underline{\tilde{n}} = \left[n_{p+1}(t) \ldots\ldots n_{p+q}(t) \right]^T$ si può conferire la forma matriciale:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\dot{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}(t) + \sum_{j=1}^{p} n_j(t)\left(\mathbf{B}_j(t)\underline{x}(t)\right) + \mathbf{C}(t)\underline{\tilde{n}}(t) + \underline{v}(t) = \\ &= \left[\mathbf{A}(t) + \sum_{j=1}^{p} n_j(t)\mathbf{B}_j(t) \right] \underline{x}(t) + \mathbf{C}(t)\underline{\tilde{n}}(t) + \underline{v}(t) \end{aligned}}$$

Questa si scrive nella forma normale a cui è applicabile la metodologia di Fokker-Planck:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} x_i(t) = h_i(\underline{x}, t) + \sum_{j=1}^{p+q} g_{ij}(\underline{x}, t) \cdot n_j(t) \\ x_i(t_o) = x_{o,i} \end{cases}$$

dove:

$$\begin{cases} h_i(\underline{x},t) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(t)\, x_k(t) + v_i(t) \\ g_{i,j}(\underline{x},t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k,j}(t)\, x_k(t) & \text{se } j = 1..p \\ c_{i,j}(t) & \text{se } j = p+1..p+q \end{cases} \end{cases}$$

Le ipotesi sui rumori sono sempre:

$$E\{n_j(t)\} = 0 \quad \forall j = 1..p+q$$

$$E\{n_i(t_1)\cdot n_j(t_2)\} = 2\cdot\delta_{ij}\cdot\delta(t_1 - t_2) \quad \forall i,j = 1..p+q$$

$$n_j(t) \text{ gaussiani } \forall j = 1..p+q$$

L'evoluzione della densità è regolata dall'equazione di Fokker-Planck seguente:

$$\frac{\partial W(\underline{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[h_i(\underline{x},t) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p+q} g_{kj}(\underline{x},t)\cdot\frac{\partial g_{ij}(\underline{x},t)}{\partial x_k}\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\left[\sum_{k=1}^{p+q} g_{ik}(\underline{x},t)\cdot g_{jk}(\underline{x},t)\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\}$$

$$W(\underline{x},t_o) = f(\underline{x})$$

dove si osserva che vale la relazione:

$$\frac{\partial g_{i,j}(\underline{x},t)}{\partial x_k} = \begin{cases} b_{i,k,j}(t) & \text{se } j = 1..p \\ 0 & \text{se } j = p+1..p+q \end{cases}$$

Quindi si ha:

$$\frac{\partial W(\underline{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(t)\,x_k + v_i(t) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l,j}(t)\,b_{i,k,j}(t)\,x_l\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} b_{i,r,k}(t)\,b_{j,s,k}(t)\,x_r\,x_s + \sum_{k=p+1}^{p+q} c_{i,k}(t)c_{j,k}(t)\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\}$$

<u>Teorema:</u> *L'evoluzione dei valori medi delle variabili x è descritta dalle seguenti equazioni differenziali:*

$$\frac{d}{dt}E\{x_i(t)\} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)\,E\{x_j(t)\} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} b_{k,p,j}(t)\,b_{i,k,j}(t)\,E\{x_p(t)\} + v_i(t)$$

oppure in forma matriciale:

$$\boxed{\frac{d}{dt}E\{\underline{x}(t)\} = \left[\mathbf{A}(t) + \sum_{j=1}^{p}\left[\mathbf{B}_j(t)\right]^2\right]E\{\underline{x}(t)\} + \underline{v}(t)}$$

<u>dim</u>: dalla definizione di valore medio segue che:

$$E\{x_i(t)\} = \int_{\Re^n} x_i\, W(\underline{x},t)\, d\underline{x}$$

quindi da Fokker-Planck:

$$\int_{\Re^n} x_b \frac{\partial W(\underline{x},t)}{\partial t}\, d\underline{x} =$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Re^n} x_b \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(t)\,x_k + v_i(t) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l,j}(t)\,x_l\, b_{i,k,j}(t)\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\} d\underline{x} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Re^n} x_b \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} b_{i,r,k}(t)\,x_r\, b_{j,s,k}(t)\,x_s + \sum_{k=p+1}^{p+q} c_{i,k}(t)c_{j,k}(t)\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\} d\underline{x}$$

Ricordando la proprietà degli integrali multipli:

$$\int_{\Re^n} \vartheta(\underline{x}) \frac{\partial \lambda(\underline{x})}{\partial x_i} d\underline{x} = - \int_{\Re^n} \lambda(\underline{x}) \frac{\partial \vartheta(\underline{x})}{\partial x_i} d\underline{x}$$

(valida se $\vartheta \cdot \lambda$ si annulla all'infinito in modo sufficientemente veloce) si vede che il secondo termine del secondo membro si annulla ed il primo termine comporta:

$$\int_{\Re^n} x_b \frac{\partial W(\underline{x},t)}{\partial t} d\underline{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Re^n} \delta_{b,i} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(t) x_k + v_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} b_{k,l,j}(t) x_l \, b_{i,k,j}(t) \right] \cdot W(\underline{x},t) \right\} d\underline{x} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{b,k}(t) \int_{\Re^n} x_k W(\underline{x},t) d\underline{x} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} b_{k,l,j}(t) b_{b,k,j}(t) \int_{\Re^n} x_l W(\underline{x},t) d\underline{x} + v_b(t)$$

da cui la tesi.

Oltre al precedente teorema sul valore medio si può dare il seguente sulla covarianza:

<u>Teorema</u> : *la covarianza è descritta dalle seguenti equazioni differenziali:*

$$\frac{d}{dt} E\{x_b x_t\} = \sum_{j=1}^{n} a_{b,j}(t) E\{x_j x_t\} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} b_{k,l,j}(t) b_{b,k,j}(t) E\{x_l x_t\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{t,j}(t) E\{x_j x_b\} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} b_{k,l,j}(t) b_{t,k,j}(t) E\{x_l x_b\} +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{p} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_{t,r,k}(t) b_{b,s,k}(t) E\{x_r x_s\} + 2 \sum_{k=p+1}^{p+q} c_{t,k}(t) c_{b,k}(t)$$

Ponendo $(\Lambda)_{b,t} = E\{x_b \, x_t\}$ e $(\Sigma)_{b,t} = E\left\{ \left[x_b - E\{x_b\} \right] \left[x_t - E\{x_t\} \right] \right\}$ *si ottiene:*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Lambda(t)=\left[\mathbf{A}(t)+\sum_{j=1}^{p}\mathbf{B}_j^2(t)\right]\Lambda(t)+\Lambda(t)\left[\mathbf{A}(t)+\sum_{j=1}^{p}\mathbf{B}_j^2(t)\right]^T+2\sum_{j=1}^{p}\mathbf{B}_j(t)\Lambda(t)\mathbf{B}_j^T(t)+2\mathbf{C}(t)\mathbf{C}^T(t)}$$

$$\boxed{\Sigma(t)=\Lambda(t)-E\left\{\underline{x}(t)\right\}E\left\{\underline{x}^T(t)\right\}}$$

<u>dim</u> : ricordando che:

$$E\left\{x_i(t)x_j(t)\right\}=\int_{\Re^n}x_i\,x_j\,W(\underline{x},t)\,d\underline{x}$$

e sfruttando l'equazione di Fokker-Planck:

$$\int_{\Re^n}x_b\,x_t\,\frac{\partial W(\underline{x},t)}{\partial t}\,d\underline{x}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Re^n}x_b\,x_t\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(t)x_k+v_i(t)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}b_{k,l,j}(t)x_l\,b_{i,k,j}(t)\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\}d\underline{x}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Re^n}x_b\,x_t\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left\{\left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}b_{i,r,k}(t)x_r\,b_{j,s,k}(t)x_s+\sum_{k=p+1}^{p+q}c_{i,k}(t)c_{j,k}(t)\right]\cdot W(\underline{x},t)\right\}d\underline{x}$$

si ha mediante la proprietà già vista sugli integrali multipli:

$$\int_{\Re^n} x_b\, x_t\, \frac{\partial W(\underline{x},t)}{\partial t}\, d\underline{x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Re^n} \left(\delta_{b,i}\, x_t + x_b\, \delta_{t,i}\right) \left\{ \left[\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(t)\, x_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} b_{k,l,j}(t)\, x_l\, b_{i,k,j}(t) \right] \cdot W(\underline{x},t) \right\} d\underline{x} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Re^n} \left(\delta_{b,j}\delta_{t,i} + \delta_{t,j}\delta_{b,i}\right) \left\{ \left[\sum_{k=1}^{p} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_{i,r,k}(t) x_r b_{j,s,k}(t) x_s + \sum_{k=p+1}^{p+q} c_{i,k}(t) c_{j,k}(t) \right] \cdot W(\underline{x},t) \right\} d\underline{x} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{b,k}(t) \int_{\Re^n} x_k\, x_t\, W(\underline{x},t) d\underline{x} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} b_{k,l,j}(t) b_{b,k,j}(t) \int_{\Re^n} x_l\, x_t\, W(\underline{x},t)\, d\underline{x} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_{t,k}(t) \int_{\Re^n} x_k\, x_b\, W(\underline{x},t) d\underline{x} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} b_{k,l,j}(t) b_{t,k,j}(t) \int_{\Re^n} x_l\, x_b\, W(\underline{x},t)\, d\underline{x} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_{b,r,k}(t) b_{t,s,k}(t) \int_{\Re^n} x_r x_s W(\underline{x},t)\, d\underline{x} + \sum_{k=p+1}^{p+q} c_{b,k}(t) c_{t,k}(t)$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_{t,r,k}(t) b_{b,s,k}(t) \int_{\Re^n} x_r x_s W(\underline{x},t) d\underline{x} + \sum_{k=p+1}^{p+q} c_{t,k}(t) c_{b,k}(t)$$

da cui la tesi.

Sistemi con rumore moltiplicativo colorato

Teorema: *consideriamo l'equazione differenziale:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = [a(t) + b(t)n(t)]x(t) \\ x(0) = x_o \end{cases}}$$

dove il rumore n(t) è Gaussiano ma non bianco con:

$$\begin{cases} E\{n(t)\} = 0 \ \forall t \\ E\{n(t_1) \cdot n(t_2)\} = R(t_1 - t_2) \forall t_1, t_2 \end{cases}$$

(R è una funzione pari dell'argomento) ed x_o è una variabile aleatoria indipendente da n(t); il valore medio evolve allora con la dinamica seguente:

$$\boxed{E\{x(t)\} = E\{x_0\} \exp\left\{\int_0^t a(\tau) d\tau\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b(\tau_1)b(\tau_2)R(\tau_1 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right\}}$$

dim: esprimiamo la soluzione formale generica:

$$x(t) = x_0 \exp\left\{\int_0^t [a(\tau) + b(\tau)n(\tau)]d\tau\right\} = x_0\left\{\exp\int_0^t [a(\tau)]d\tau\right\}\exp\left\{\int_0^t [b(\tau)n(\tau)]d\tau\right\} =$$

$$= x_0 \exp\left\{\int_0^t [a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\left[\int_0^t [b(\tau)n(\tau)]d\tau\right]^i =$$

$$= x_0 \exp\left\{\int_0^t [a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t [b(\tau_1)n(\tau_1)]\ldots[b(\tau_i)n(\tau_i)]d\tau_1\ldots d\tau_i}_{i-volte}$$

bisogna calcolare il valore medio:

$$E\{x(t)\} = E\{x_0\}\exp\left\{\int_0^t [a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \; [b(\tau_1)\dots b(\tau_i)]E\{n(\tau_1)\dots n(\tau_i)\}d\tau_1\dots d\tau_i}_{i-volte}$$

la gaussianità del rumore comporta (proprietà anche detta teorema di Wick generalizzato a generica autocorrelazione):

$$\boxed{\begin{aligned} &E\{n(t_1)n(t_2)\dots n(t_{2k-1})\} = 0 \\ &E\{n(t_1)n(t_2)\dots n(t_{2k})\} = \sum_{P\subset S_{2k}} R(t_{i_1} - t_{i_2})\dots R(t_{i_{2k-1}} - t_{i_{2k}}) \end{aligned}}$$

dove la somma è estesa a tutte le permutazioni $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 2k \\ i_1 & \dots & i_{2k} \end{pmatrix}$ del tipo P che generano tutti termini diversi all'interno del simbolo di sommatoria.
Si verifica che tali permutazioni sono in numero $\frac{(2k)!}{2^k k!}$.
Ad esempio si ha:

$$E\{n(t_1)n(t_2)n(t_3)n(t_4)\} = [R(t_1 - t_2)R(t_3 - t_4) + R(t_1 - t_3)R(t_2 - t_4) + R(t_1 - t_4)R(t_2 - t_3)]$$

Quindi si può procedere nel calcolo del valore medio considerando solo i termini di ordine pari nella somma precedente:

$$E\{x(t)\} =$$

$$= E\{x_0\}\exp\left\{\int_0^t [a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \; [b(\tau_1)\dots b(\tau_{2k})]E\{n(\tau_1)\dots n(\tau_{2k})\}d\tau_1\dots d\tau_{2k}}_{2k-volte} =$$

$$= E\{x_0\}\exp\left\{\int_0^t [a(\tau)]d\tau\right\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\int_0^t \dots \int_0^t \; [b(\tau_1)\dots b(\tau_{2k})]\sum_{P\subset S_{2k}} R(t_{i_1} - t_{i_2})\dots R(t_{i_{2k-1}} - t_{i_{2k}})d\tau_1\dots d\tau_{2k}$$

Quindi:

$$E\{x(t)\} = E\{x_0\}\exp\left\{\int_0^t [a(\tau)]d\tau\right\}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!}{2^k k!}\left[\int_0^t\int_0^t b(\tau_1)b(\tau_2)R(\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right]^k =$$

$$= E\{x_0\}\exp\left\{\int_0^t a(\tau)d\tau\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b(\tau_1)b(\tau_2)R(\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right\}$$

c.v.d.

Esempio:

Se per esempio:

$$\begin{cases} b(t) = b \qquad \text{costante} \\ R(t_1 - t_2) = \dfrac{1}{\tau}\exp\left(-\dfrac{|t_1 - t_2|}{\tau}\right) \end{cases}$$

segue che:

$$E\{x(t)\} = E\{x_0\}\exp\left\{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau\right\}\exp\left(b^2 t\right)\exp\left[b^2\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)\right]$$

Esempio:

Se per esempio si considera il sistema di Floquet:

$$\begin{cases} b(t) = b\cos(\omega t) \\ R(t_1 - t_2) = \dfrac{1}{\tau}\exp\left(-\dfrac{|t_1 - t_2|}{\tau}\right) \end{cases}$$

segue che:

$$E\{x(t)\} = E\{x_0\}\exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right\}$$

$$\exp\left\{\frac{\frac{b^2}{2}\left[\cos(\omega t)\mathrm{sen}(\omega t)(1+\omega^2\tau^2) - \cos^2(\omega t)(1+\omega^2\tau^2)\omega\tau + 2\omega\tau e^{-\frac{t}{\tau}}[\cos(\omega t) - \omega\tau\,\mathrm{sen}(\omega t)] + \omega(t-\tau) + \omega^3\tau^2(t+\tau)\right]}{\omega(1+\omega^2\tau^2+\omega^4\tau^4)}\right\}$$

<u>Teorema:</u> *consideriamo il sistema di equazioni differenziali:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}(t)}{dt} = \mathbf{B}n(t)\underline{x}(t) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_o \end{cases}}$$

dove B è una matrice costante ed il rumore n(t) è Gaussiano con:

$$\begin{cases} E\{n(t)\} = 0 \ \forall t \\ E\{n(t_1)\cdot n(t_2)\} = R(t_1 - t_2)\forall t_1, t_2 \end{cases}$$

(R è una funzione pari dell'argomento) ed $\underline{x}_o$ *è un vettore aleatorio indipendente da n(t); il valore medio evolve allora con la dinamica seguente:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dE\{\underline{x}(t)\}}{dt} = \mathbf{B}^2\displaystyle\int_0^t R(t-\tau)d\tau E\{\underline{x}(t)\} \\ E\{\underline{x}(0)\} = E\{\underline{x}_o\} \end{cases}}$$

<u>dim:</u> esprimiamo la soluzione formale generica:

$$\underline{x}(t) = \exp\left\{\mathbf{B}\int_0^t n(\tau)d\tau\right\}\underline{x_0} = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\mathbf{B}^i\left[\int_0^t [n(\tau)]d\tau\right]^i\underline{x_0} =$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{B}^i \left[\int_0^t \ldots \int_0^t \left[n(\tau_1) \ldots n(\tau_i) \right] d\tau_1 \ldots d\tau_i \right] \underline{x_0}$$

bisogna calcolare il valore medio:

$$E\{\underline{x(t)}\} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{B}^i \left[\int_0^t \ldots \int_0^t E\{ n(\tau_1) \ldots n(\tau_i) \} d\tau_1 \ldots d\tau_i \right] E\{\underline{x_0}\}$$

come noto la gaussianità del rumore comporta:

$$E\{ n(t_1) n(t_2) \ldots n(t_{2k-1}) \} = 0$$
$$E\{ n(t_1) n(t_2) \ldots n(t_{2k}) \} = \sum_{P \subset S_{2k}} R(t_{i_1} - t_{i_2}) \ldots R(t_{i_{2k-1}} - t_{i_{2k}})$$

e quindi:

$$E\{x(t)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{(2k)!}{2^k k!} \mathbf{B}^{2k} \left[\int_0^t \int_0^t b(\tau_1) b(\tau_2) R(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right]^k E\{\underline{x_0}\} =$$
$$= \exp\left\{ \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \int_0^t \int_0^t R(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\} E\{\underline{x_0}\}$$

Visto che il nucleo dell'integrale è simmetrico (cioè l'autocorrelazione è pari) si può usare la proprietà:

- se f(x,y)=f(y,x) allora:

$$1) \quad \int_0^t \int_0^t f(x,y) dx dy = 2 \int_0^t \int_0^y f(x,y) dx dy$$

$$2) \quad \frac{d}{dt} \int_0^t \int_0^t f(x,y) dx dy = 2 \int_0^t f(x,t) dx$$

Derivando l'espressione del valore medio segue quindi subito la tesi.

c.v.d.

Quest'ultima proprietà permette di costruire l'equazione di Fokker-Planck relativa ad un semplice sistema differenziale con rumore moltiplicativo colorato:

<u>*Teorema:*</u> *consideriamo l'equazione differenziale:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = g(x)n(t) \\ x(0) = x_o \end{cases}}$$

dove il rumore n(t) è Gaussiano colorato con:

$$\begin{cases} E\{n(t)\} = 0 \ \forall t \\ E\{n(t_1)\cdot n(t_2)\} = R(t_1 - t_2)\forall t_1, t_2 \end{cases}$$

ed x_o è una variabile aleatoria indipendente da n(t) e distribuita con la densità f_o ; la densita di probabilità W del processo x evolve con la seguente equazione di Fokker-Planck:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial W(x,t)}{\partial\ t} = -\dfrac{\partial}{\partial\ x}\left\{\dfrac{\partial g(x)}{\partial x} g(x)W(x,t)\right\}\displaystyle\int_0^t R(t-\tau)d\tau + \dfrac{\partial^2}{\partial\ x^2}\left[g^2(x)\cdot W(x,t)\right]\int_0^t R(t-\tau)d\tau \\ W(x,0) = f_o(x) \end{cases}}$$

<u>*dim:*</u> supponiamo inizialmente che n(t) ed x_0 siano particolari istanze prefissate e che la soluzione dell'equazione sia allora x(t) ; in tale caso la seguente funzione delle variabili x e t:

$$\rho(x,t) = \delta(x - x(t))$$

evolve secondo la nota relazione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho(x,t)}{\partial\ t} = -\dfrac{\partial}{\partial\ x}\{[g(x)n(t)]\cdot\rho(x,t)\} \\ \rho(x,0) = \delta(x - x_o) \end{cases}$$

Consideriamo ora nello spazio delle funzioni di una variabile una base completa ortonormale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) f_m(x) dx = \delta_{n,m}$$

Una generica funzione f(x) viene sviluppata nel modo seguente:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f_k(x)$$

dove i coefficienti sono calcolabili così:

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) f(x) dx$$

Gli operatori lineari che agiscono nello spazio delle funzioni definite in $(-\infty,+\infty)$ sono rappresentabili mediante matrici utilizzando la base riportata. Essendo O un operatore si ha:

$$(O)_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) O[f_m(x)] dx$$

Imponendo lo sviluppo :

$$\rho(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t) f_k(x)$$

si possono costruire le equazioni nei coefficienti $c_k(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dc_j(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{+\infty} B_{jk} c_k(t) n(t) \\ c_k(0) = f_k(x_o) \end{cases}$$

dove B è la matrice associata all'operatore $-\frac{\partial}{\partial x}[g(x)\bullet]$ e quindi:

$$B_{jk} = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x) \frac{\partial}{\partial x}\left[g(x) f_k(x)\right] dx$$

Per passare alla densità di probabilità W è necessario ricordare che:

$$W(x,t) = E\left\{\delta\left(x - x(t)\right)\right\} = E\left\{\rho(x,t)\right\} = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left\{c_k(t)\right\} f_k(x)$$

ma per la proprietà appena vista dei sistemi con rumore moltiplicativo otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{dE\{\underline{c}(t)\}}{dt} = \mathbf{B}^2 \displaystyle\int_0^t R(t-\tau) d\tau E\{\underline{c}(t)\} \\ E\{c_k(0)\} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) f_o(x) dx \end{cases}$$

passando alle funzioni di due variabili si ottiene subito:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W(x,t)}{\partial\ t} = \dfrac{\partial}{\partial\ x}\left\{ g(x) \cdot \dfrac{\partial}{\partial\ x}\left[g(x) \cdot W(x,t)\right]\right\} \displaystyle\int_0^t R(t-\tau) d\tau \\ W(x,0) = f_o(x) \end{cases}$$

e usando la proprietà della derivata dei prodotti si ha:

$$\frac{\partial}{\partial\ x}\left\{ g(x) \cdot \frac{\partial}{\partial\ x}\left[g(x) W(x,t)\right]\right\} - \frac{\partial^2}{\partial\ x^2}\left[g^2(x) W(x,t)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\ x}\left\{ g(x) \cdot \frac{\partial}{\partial\ x}\left[g(x) W(x,t)\right] - \frac{\partial}{\partial\ x}\left[g^2(x) W(x,t)\right]\right\} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\ x}\left[g(x) \frac{\partial g(x)}{\partial\ x} W(x,t)\right]$$

e questo conclude la dimostrazione di questa particolare equazione di Fokker-Planck.

Nota:
Si osservi che per ricadere nei casi noti di rumore bianco bisogna porre *R(s)=2δ(s)* e che gli integrali si svolgono secondo la regola:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)ds = 1 \\ \int_{0}^{+\infty} \delta(s)ds = \frac{1}{2} \end{cases}$$

In particolare se *R(s)=2δ(s)* si ottiene $\int_0^t R(t-\tau)d\tau = 1$.

Esempio:

Considerando il sistema con rumore colorato:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = axn(t) \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

si può scrivere l'equazione di evoluzione della densità:

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \left[a^2 W(x,t) + 3a^2 x \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} + a^2 x^2 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right] \int_0^t R(t-\tau)d\tau \\ W(x,0) = f_o(x) \end{cases}$$

se il rumore diventa bianco l'equazione per W diventa:

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \left[a^2 W(x,t) + 3a^2 x \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} + a^2 x^2 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right] \\ W(x,0) = f_o(x) \end{cases}$$

Integrando su R le equazioni precedenti moltiplicate per x elevato al generico indice n si trova l'andamento dei momenti della soluzione. Per rumore bianco si ottiene facilmente:

$$\frac{dE\{x(t)^n\}}{dt} = a^2 n^2 E\{x(t)^n\}$$

e per rumore colorato:

$$\frac{dE\{x(t)^n\}}{dt} = a^2 n^2 \int_0^t R(t-\tau)\, d\tau\, E\{x(t)^n\}$$

le cui soluzioni sono:

$$\boxed{E\{x(t)^n\} = \exp\left(a^2 n^2 t\right) E\{x(o)^n\}}$$

e per rumore colorato:

$$\boxed{E\{x(t)^n\} = \exp\left\{ a^2 n^2 \int_0^t \int_0^y R(y-x)\, dx\, dy \right\} E\{x(0)^n\}}$$

ma si può fare di può infatti è possibile esprimere le densità in forma chiusa: osservando che la soluzione è un esponenziale di un rumore gaussiano si può pensare che sia distribuita secondo la densità log-normale che, usata in varie questioni di statistica, è proprio la distribuzione che si ottiene come esponenziale di una gaussiana.
E' infatti possibile verificare con semplice sostituzione che le densità seguenti sono le soluzioni esatte delle equazioni di Fokker-Planck sopra scritte con rumore bianco o colorato.

Con rumore bianco:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \left[a^2 W(x,t) + 3a^2 x \dfrac{\partial W(x,t)}{\partial x} + a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right] \\ W(x,0) = \delta(x - x_0) \end{cases}$$

$$W(x,t) = \frac{1}{2ax\sqrt{\pi t}} \exp\left\{ - \frac{\log^2\left(\dfrac{x}{x_0}\right)}{4a^2 t} \right\}$$

Con rumore colorato:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \left[a^2 W(x,t) + 3a^2 x \dfrac{\partial W(x,t)}{\partial x} + a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right] \displaystyle\int_0^t R(t-\tau)\,d\tau \\ W(x,0) = \delta(x - x_0) \end{cases}$$

$$W(x,t) = \frac{1}{2ax\sqrt{\pi \displaystyle\int_0^t \int_0^\eta R(\eta - \xi)\,d\xi\,d\eta}} \exp\left\{ - \frac{\log^2\left(\dfrac{x}{x_0}\right)}{4a^2 \displaystyle\int_0^t \int_0^\eta R(\eta - \xi)\,d\xi\,d\eta} \right\}$$

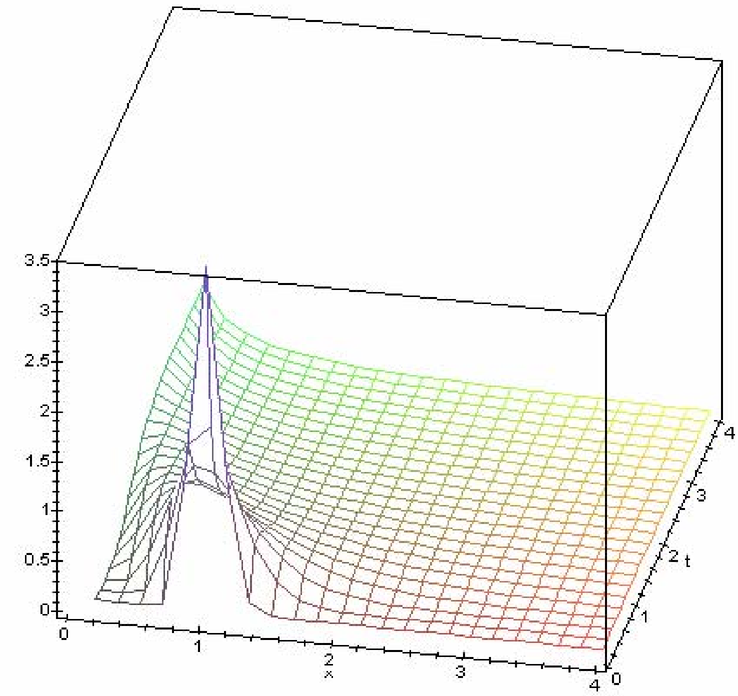
Si osservi che tali densità sono definite per t positivo e per x positivo o negativo a seconda del segno della condizione iniziale.

Se per esempio: $$R(t_1 - t_2) = \frac{1}{\tau} \exp\left(- \frac{|t_1 - t_2|}{\tau} \right)$$

si ha: $$W(x,t) = \frac{1}{2ax\sqrt{\pi\left[t + \tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \right]}} \exp\left\{ - \frac{\log^2\left(\dfrac{x}{x_0}\right)}{4a^2\left[t + \tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \right]} \right\}$$

Ecco due esempi dell'ultima densità scritta:

```
plot3d(exp(-(log(x))^2/(4*(t+2*(exp(-t/2)-1))))/(2*x*sqrt(Pi*(t+2*(exp(-t/2)-1)))),x=0..4,t=0..4);
```




```
plot3d(  exp(-(log(x))^2/(4*t))/(2*x*sqrt(Pi*t)),x=0..2.5,t=0..2.5);
```